Polynomdivision

Polynomdivision am Beispiel einer Polynom-funktion vierten Grades

mathemio

Was ist ein „Polynom"?

- Mit „Polynom" bezeichnet man die gewichtete Summe von Potenzen. Eine Potenz besteht aus einer Basis und einer Hochzahl, dem Exponenten.
- Eine Polynomfunktion ist eine Funktion, deren Termdarstellung ein Polynom ist. Dabei gibt der größte Exponent den Grad der Polynomfunktion an.
- Eine Polynomfunktion vierten Grades hat die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

(wobei ein oder mehrere Koeffizient(en) null sein können)

Wozu brauchen wir Polynomdivision?

a) Indem wir eine Polynomfunktion durch einen Linearfaktor dividieren, verringern wir den Grad des Polynoms und damit den Grad der Funktion um eins.

b) Bei einer gebrochenrationalen Funktion bestimmen wir durch Division von Zählerpolynom durch Nennerpolynom die Gleichung der Asymptote.

Zahlenbeispiel zu a)

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8$$

Im Rahmen der Nullstellenbestimmung einer Funktionsanalyse (Kurvendiskussion) bedarf es der Bestimmung des x-Wertes, der folgende Gleichung erfüllt: $f(x) = 0$

Da diese Gleichung weder durch Ausklammern, Substitution noch durch Anwendung der pq-Formel gelöst werden kann, brauchen wir ein Verfahren, das den Grad der Funktion verringert.

Linearfaktordarstellung

Anstelle eines Polynoms kann man eine Funktion auch als ein Produkt von Linearfaktoren schreiben. Würde man für x entweder -1, 2 oder 4 einsetzen, wäre der Funktionswert null. Aus der Linearfaktordarstellung lassen sich also die Nullstellen direkt ablesen.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8 = (x+1)(x+1)(x-2)(x-4)$$

Nach dem „Satz vom Nullprodukt“ ist ein Produkt immer genau dann null, wenn mindestens einer seiner Faktoren null ist!

Schritt 1 und 2

$$(\boxed{x^4} - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8) : (\boxed{x} + 1) = \ ?$$

Die erste Nullstelle - die den Linearfaktor bildet, durch den wir dividieren - ermitteln wir durch Ausprobieren. Hier ist es $x_1 = -1$. Man versucht es am besten zuerst mit kleinen ganzzahligen Teilern des Absolutgliedes.

Wir beginnen mit der eigentlichen Division, indem wir x^4 durch x^1 teilen. Wenn wir dies als Bruch darstellen, kommen wir recht einfach, durch Kürzen, auf das Ergebnis:

$$\frac{x^4}{x^1} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} = x^3$$

mathemio

Schritt 3 und 4

Wir schreiben x^4 unter die entsprechende Potenz des Polynoms. Dabei empfehle ich, eine Klammer mit Minuszeichen voranzustellen:

$$
\begin{aligned}
&(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8) : (x + 1) = x^3 \ldots \\
-&(x^4
\end{aligned}
$$

Dann multiplizieren wir x^3 mit dem zweiten Summanden des Linearfaktors (+1) und schreiben das Ergebnis ebenfalls unter die entsprechende Potenz des Polynoms:

$$
\begin{aligned}
&(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8) : (x + 1) = x^3 \ldots \\
-&(x^4 + 1x^3)
\end{aligned}
$$

mathemio

Schritt 5 und fortlaufend

$$(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8) : (\boxed{x} + 1) = x^3 \ldots$$
$$\underline{-(x^4 + 1x^3)}$$
$$\boxed{-5x^3} - 3x^2$$

Der so berechnete Term wird nun abgezogen. Man sollte dabei unbedingt das Minuszeichen vor der Klammer beachten! Danach schreibt man die nächste Potenz des Polynoms neben die Differenz und rechnet wie zuvor beschrieben weiter ...

$$(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8) : (x + 1) = x^3 \boxed{-5x^2} \ldots$$

mathemio

Vollständige Rechnung

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8) : (x + 1) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \\
\underline{-(x^4 + 1x^3)} \\
\quad -5x^3 - 3x^2 \\
\quad \underline{-(-5x^3 - 5x^2)} \\
\qquad 2x^2 + 10x \\
\qquad \underline{-(2x^2 + 2x)} \\
\qquad\quad 8x + 8 \\
\qquad\quad \underline{-(8x + 8)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Hier muss eine 0 stehen, ansonsten hat man etwas falsch gemacht!

mathemio

Lexikon mathematischer Begriffe

Absolutglied	Als Absolutglied bezeichnet man bei einer Polynomfunktion das meist zuletzt stehende, freie Glied (ohne Variable). Im Beispiel: e.
Koeffizient	Mit Koeffizient meint man den Faktor (Zahl oder Buchstabe), der vor der Variablen steht, z.B. die -4 bei -4x oder das b bei bx.

mathemio

Impressum

Der MATHE COACH
Dipl.-Kffr. Sabine Degen
An der Pferdsweide 42
54296 Trier
Tel.: +49 (0)651 561133 2
Fax: +49 (0)651 561133 8
Mobil: +49 (0)160 915 915 91
Mail: info@mathecoach-trier.de
Web: www.mathecoach-trier.de
Network: www.mathemio.de

mathemio