Bestimmung einer ganzrationalen Funktion mit Hilfe gegebener Eigenschaften

Zur eindeutigen Bestimmung einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades, benötigen wir ebenso viele Gleichungen, wie wir Variablen zu bestimmen haben.

Eine Funktion **4. Grades** hat z.B. die allgemeine Form:
$\mathbf{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$ (5 Variablen, also brauchen wir 5 Gleichungen)

Bei einer Funktion **3. Grades** lautet sie einfach:
$\mathbf{g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$ (hier werden nur 4 Gleichungen benötigt)

Soll der Graph der Funktion **achsensymmetrisch zur y-Achse** sein, dann darf die Funktionsgleichung nur gerade Exponenten enthalten, d.h. sie reduziert sich z.B. zu:
$\mathbf{h(x) = ax^4 + bx^2 + c}$

Bei einem **zum Ursprung punktsymmetrischen** Graphen enthält der Funktionsterm nur ungerade Exponenten ohne Absolutglied (die Zahl ohne x) und kann so aussehen:
$\mathbf{k(x) = ax^3 + bx}$ oder auch: $\mathbf{l(x) = ax^5 + bx^3 + cx}$

An Stelle von a, b, c, d, e stehen auch gerne Bezeichnungen wie a_0, a_1, a_2, a_3 und a_4.
Ich halte das für unnötig verwirrend und rechne daher lieber mit verschiedenen Buchstaben. Damit man später alle Gleichungen schnell aufgestellt hat, empfehle ich, die Ableitungen der Funktion gleich zu Anfang aufzuschreiben:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\
f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\
f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c
\end{aligned}
$$

Probleme gibt es häufiger beim Aufstellen der Bedingungen und Gleichungen aus den differenziert formulierten Eigenschaften. Daher zähle ich hier die gängigsten Formulierungen mit Ihren mathematischen Bedeutungen auf:

Bestimmung einer ganzrationalen Funktion mit Hilfe gegebener Eigenschaften

Der Graph der Funktion *verläuft durch* einen Punkt $P(x_a \mid y_a)$ **Bsp.: $P(-3 \mid 2)$**	Dieser Punkt ist Teil der Funktion: $\mathbf{f(x_a) = y_a}$ **Bed.: $f(-3) = 2$**, in die allgemeine Form einer Funktion 4. Grades eingesetzt, ergibt das: $f(x) = a\,(-3)^4 + b\,(-3)^3 + c\,(-3)^2 + d\,(-3) + e = 2$, daraus wird: $f(x) = 81a - 27b + 9c - 3d + e = 2$
Der Graph der Funktion *schneidet* die x-Achse an einem bestimmten Punkt $P(x_a \mid 0)$	Dieser Punkt ist Teil der Funktion und gleichzeitig eine **Nullstelle**. Wir bilden die Bedingung**:** $\mathbf{f(x_a) = 0}$ und setzen x_a in die Ausgangsfunktion ein.
Der Graph der Funktion *schneidet* die y-Achse an einem bestimmten Punkt $P(0 \mid y_a)$	Dieser Punkt ist Teil der Funktion und gleichzeitig der **Schnittpunkt mit der y-Achse**. Wir bilden die Bedingung**:** $\mathbf{f(0) = y_a}$ und setzen x_a in die Ausgangsfunktion ein. Wenn die Funktion ein Absolutglied hat, dann wird dieses dadurch bereits eindeutig bestimmt. Ansonsten geht der Graph durch den Koordinatenursprung $P(0 \mid 0)$.
Der Graph der Funktion *berührt* die x-Achse an der Stelle x_a	Berühren bedeutet, dass sich der Graph entweder von oben oder unten der x-Achse nähert und diese genau an diesem Punkt trifft - aber **nicht** schneidet. Das bedeutet, dieser Punkt muss gleichzeitig Teil der Funktion und ein Extrempunkt sein. Wir können daraus zwei Bedingungen bilden: **1. Bed.: $f(x_a) = 0$** (Bed. für Nullstelle) **2. Bed.: $f'(x_a) = 0$** (notwendige Bed. für Extrema) Wir setzen die Stelle $\mathbf{x_a}$ in die Ausgangsgleichung der Funktion und deren erste Ableitung ein und setzen beide Gleichungen gleich null.
Der Graph der Funktion hat an der Stelle x_a die *Steigung* m bzw. eine *Tangente* mit Steigung m **Bsp.: $x_a = 3$, $m = 4$**	Die erste Ableitung gibt die Steigung des Funktionsgraphen an einer bestimmten Stelle an. Sie ist gleichzeitig die Steigung der Tangente. $\mathbf{f'(x_a) = m}$, Bsp.: $\mathbf{f'(3) = 4}$

Bestimmung einer ganzrationalen Funktion mit Hilfe gegebener Eigenschaften

Waagrechte Tangente bei x_a	Die waagrechte Tangente ist ebenfalls ein Hinweis auf einen Extrempunkt, weil an dieser Stelle der Graph der Funktion keine Steigung aufweist. $f'(x_a) = 0$
Extrempunkt (Hoch- bzw. Tiefpunkt) an der Stelle x_a	Siehe waagrechte Tangente: $f'(x_a) = 0$
Wendepunkt an der Stelle x_a	Notwendige Bedingung dafür ist: $f''(x_a) = 0$
Sattelpunkt an der Stelle x_a	Der Sattelpunkt ist ein besonderer Wendepunkt. Dort ist sowohl die erste, als auch die zweite Ableitung gleich null: **1. Bed.:** $f'(x_a) = 0$, **2. Bed.:** $f''(x_a) = 0$
Wendetangente an der Stelle x_a hat die Steigung m	Daraus ergeben sich wieder zwei Bedingungen: **1. Bed.:** $f''(x_a) = 0$ (wegen dem Wendepunkt) und **2. Bed.:** $f'(x_a) = m$ (wegen der Tangente)

Wenn die Gleichungen alle komplett sind, beginnt das Lösen derselben mit Hilfe des Einsetzungs-, Gleichsetzungs-, oder Additionsverfahren, z.B. mit dem Gauß'schen Algorithmus.